TD Systèmes dynamiques

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

6CQ **Exercice 1** On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\sin u_n}{2} + 1$.

1. Déterminer $K < 1$ tel que la fonction $f\colon x \mapsto \frac{\sin x}{2} + 1$ soit K-lipschitzienne.
2. Montrer que f admet un point fixe a dans $[0, 2]$. **Indication** : Considérer $g\colon x \mapsto f(x) - x$.
3. En utilisant le caractère lipschitzien, montrer que ce point fixe est unique.
4. Majorer $|u_n - a|$ en fonction de n, K et $|u_0 - a|$. En déduire que (u_n) converge.

39C **Exercice 2** Discuter de la convergence des suites, en fonction de u_0.

1. $u_{n+1} = \sin u_n, u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ puis $u_0 \in \mathbb{R}$
2. $u_0 \geq \frac{-3}{2}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$
3. $u_0 \geq 0,\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{4}$
4. $u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$
5. $u_0 > 0, u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2}$
6. $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$

MQL **Exercice 3**

1. Montrer que $\cos$ admet un unique point fixe ℓ.
2. Montrer que $\cos \circ \cos$ admet un unique point fixe.
   Indication : *Pour l'unicité : si f est une fonction dérivable dont la dérivée est positive et ne s'annule que sur un «ensemble discret», c'est-à-dire telle qu'il n'existe pas d'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante.*
3. Étudier la convergence d'une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos u_n$.

16D **Exercice 4** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne.

1. Montrer que l'ensemble A des points fixes de f est un intervalle.
   Indication : Utiliser la caractérisation des intervalles.
2. Montrer que si A est non vide et borné, c'est un segment.
   Indication : Il s'agit de montrer que les extrémités de A appartiennent à A. Justifier et utiliser la continuité de f.

KN7 **Exercice 5** On considère une suite définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$.

1. Étudier la convergence de (u_n).
2. Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.
3. En déduire un équivalent de u_n.

A09 **Exercice 6** Algorithme de Héron Soit $a > 0$, on définit une suite (u_n) par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}$. **Indication** : *On a $|u_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2u_n}$.*
3. En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de n et a.
4. Pour $a = 2$, montrer que $|u_n - \sqrt{a}| \leq (\frac{1}{4})^{2^n - 1}$. En utilisant $2^{10} \geq 10^3$, montrer que $|u_{12} - \sqrt{a}| \leq 10^{-2024}$. À partir de quelle valeur de n est-ce que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?

0UH **Exercice 7** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(\sin x)$. Montrer que f est constante.

Indication : *Pour $x \in \mathbb{R}$, introduire une suite (u_n).*

6ZM **Exercice 8** Ensemble de Julia Soit $c \in \mathbb{C}$. On considère $f\colon z \mapsto z^2 + c$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit une suite u_n par $u_0 = z$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On note K l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels cette suite est bornée.

1. Déterminer K si $c = 0$.
2. Montrer que K est borné.
3. ★ Montrer que K est fermé.

K fermé signifie que si $(z_n) \in K^{\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers z, alors $z \in K$.

25D **Exercice 9** Preuve dynamique du petit théorème de Fermat

1. Soit $f\colon [a, b] \to [a, b]$. Un point périodique de f est un point $x_0 \in [a, b]$ tel qu'il existe $n_0 > 0$ tel que $f^{(n_0)}(x_0) = x_0$.
   a) Montrer que si x_0 est périodique de période n et de plus petite période n_0, alors $n_0 \mid n$.
   b) Montrer que pour tout $m \geq 1$, si le nombre de points périodique de plus petite période m est fini, il est divisible par m.
2. Pour tout entier $a \geq 2$, on considère $g_a\colon [0, 1[\to [0, 1[\quad x \mapsto \{ax\}$.
   Cette définition est équivalente à ce que $g_a(x) = ax - j$ si $\frac{j}{a} \leq x < \frac{j+1}{a}$, pour $j \in [\![0, a-1]\!]$.
   a) Dessiner le graphe de g_a, puis, pour $n \geq 1$, celui de la composée $g_a^{(n)}$. Combien de points fixes admet $g_a^{(n)}$?
   b) Montrer que, pour p premier, $p \mid a^p - a$.

1YO **Exercice 10** ★ Soit (u_n) vérifiant $u_0 \in]0,4[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$.

1. Montrer que (u_n) est bornée. Quelles sont les limites possibles de (u_n) ?
2. Montrer que si (u_n) converge, elle est stationnaire.
3. On pose $u_0 = 4\sin^2 \alpha$. Pour quelles valeurs de u_0 est-ce que la suite (u_n) converge ?

GR6 **Exercice 11** ★ Soit $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et (u_n) une suite définie par $u_0 \in [a,b]$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to 0$.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle. Puis un segment.
2. Montrer que (u_n) converge.

Récurrences linéaires

ALG **Exercice 12** Déterminer une expression de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 1$

JQ4 **Exercice 13** Déterminer une forme explicite du terme général de la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2^n - 1$.

9VA **Exercice 14** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 2u_n - 1$. Montrer que si (u_n) est bornée alors elle est constante égale à 1.

Autres récurrences

8WA **Exercice 15** ★ Soit (u_n) définie par $0 < u_0, u_1 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right)$. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

TS8 **Exercice 16** ★ [Centrale MP] Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{u_{n-1}} + \frac{1}{n}$.
Indication : *Pour $a > 1$, montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq a$.*

XIO **Exercice 17** ★ [Oral X] Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles, vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \int_0^1 \max(x, v_n)\,\mathrm{d}x$ et $v_{n+1} = \int_0^1 \max(x, u_n)\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence des deux suites. **Indication** : *Supposer dans un premier temps que $u_0, v_0 \in [0, 1]$.*

Systèmes dynamiques linéaires d'ordre 2

A2Z **Exercice 18** Donner une expression explicite de la suite réelle définie par

1. $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n$
2. $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
3. $u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$

Z9P **Exercice 19** On considère (u_n) définie par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+2} + au_{n+1} + u_n = 0$.

1. ♡ Déterminer les racines complexes du polynôme $P(X) = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda = e^{i\theta}$. Déterminer une CNS sur $\theta \in \mathbb{R}$ pour que la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique.
3. Expliciter une infinité de valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles (u_n) est périodique. ★ Sont-ce les seules ?

O62 **Exercice 20** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = e^{4t}$
2. $y'' + 5y' - 6y = \sin t$
3. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$
4. $y'' + y = \cos^2 t$
5. $y'' + 9y = \cos(3t)$
6. $y'' - 2y' + y = e^t \cos t$

V6E **Exercice 21** Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable, et donner une expression de sa dérivée.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E)\colon y'' + y = g(x)$.
3. Résoudre (E).

FN7 **Exercice 22** Résoudre l'équation différentielle $(E)\colon y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$, en introduisant la fonction $z(x) = e^{x^2}y(x)$.

QVU **Exercice 23** Soit y une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $x^2y'' - 2y = 0$, c'est-à-dire vérifiant $\forall x > 0,\ x^2y''(x) - 2y(x) = 0$. Montrer que $z\colon t \mapsto y(e^t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple. En déduire une expression de y.

ITM **Exercice 24** Soit $0 < \varepsilon < 1$. On considère l'équation différentielle $(E)\colon\ y'' + 2\varepsilon y' + y = \cos(\omega t)$.

1. Soit y_1, y_2 deux solutions de (E). Que dire de $y_1 - y_2$? En déduire qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ |y_1(t) - y_2(t)| \leq Ke^{-\varepsilon t}$.
2. Déterminer l'amplitude du régime permanent.

IWB **Exercice 25** Résoudre l'équation $y''' - y' = 1$.

PCT **Exercice 26** Déterminer l'expression de la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \geq 0,\ u_{n+2} - 4u_{n+1} - 3u_n = 1$.

UF3 **Exercice 27** ★ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|a| \neq 1$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax + b)$. Démontrer que f est constante.

Autres

GYB **Exercice 28** Soit $p \geq 2$.

1. On considère $u_0, u_1 \in [\![0, p-1]\!]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_{n+2} comme le reste de la division euclidienne de $u_{n+1} + u_n$ par p. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
2. On considère la suite de Fibonacci définie par $F_1 = F_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer qu'une infinité de termes de cette suite sont divisibles par p.

B7K **Exercice 29** ★ On considère des seaux contenant des quantités entières d'eau. Si un seau contient plus d'eau qu'un autre, on a le droit de verser de l'eau du premier dans le second jusqu'à ce que la quantité d'eau du second ait doublé.

1. On considère une situation à deux seau, l'un contenant un volume pair d'eau a, et l'autre un volume impair.
   Montrer qu'en appliquant plusieurs fois l'opération donnée, on peut obtenir une situation où l'un des seaux contient comme volume la moitié de a. **Indication** : *Justifier que la transformation est injective.*
2. On considère une situation initiale avec trois seaux.
   a) On suppose qu'un seau a un volume impair d'eau, et les deux autres des volumes pairs. En cherchant la question précédente à un seau dont le volume est un multiple de quatre, montrer qu'il est possible de vider un seau.
   b) Dans le cas général, montrer que l'on peut vider un seau.

IXH **Exercice 30** ★ [Oral X/ENS] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On appelle m-motif de (a_n) tout m-uplet de termes consécutifs.

1. Montrer que si (a_n) a au plus m m-motifs distincts, alors (a_n) est périodique.
2. Et si elle en a au plus $m + 1$?